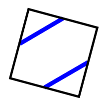
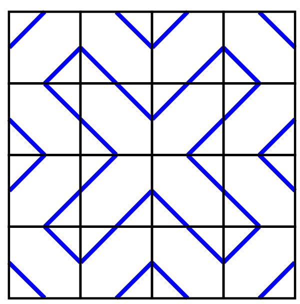
Examen de invitación a la OMM 2026
Nivel 4

Problema 1. Se tienen 16 mosaicos cuadrados idénticos. En cada mosaico hay dos líneas que unen los puntos medios de los lados como se ve en la figura, y cada una de estas líneas mide 1 cm. Se acomodan los mosaicos formando un cuadrado; algunas líneas del diseño quedarán conectadas formando caminos. ¿Cuánto mide el camino más largo que puede formarse?



(a) 7 cm (b) 12 cm (c) 16 cm (d) 20 cm (e) 28 cm

Solución 1. **(d)**. Es claro que en cada uno de los 12 mosaicos del borde sólo puede usarse un segmento para formar el camino, así que a lo más son $2 \times 4 + 12 = 20$. En la figura se muestra un acomodo que logra los 20 cm.



Problema 2. Leo hizo las siguientes afirmaciones sobre su número favorito de 2 cifras:

Primero dijo que es menor a 30, luego dijo que es múltiplo de 3, luego que es un número par, luego que una de sus cifras es 2, luego que su doble tiene 3 cifras y, finalmente, que una de sus cifras es 7.

Se sabe que siempre alterna dos verdades con una mentira pero no se sabe si empieza con verdad o con mentira. ¿Cuál es la suma de las cifras de su número favorito?

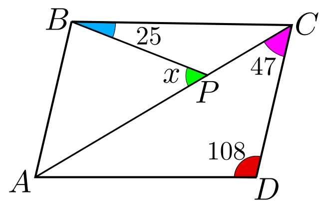
(a) 3 (b) 6 (c) 11 (d) 12 (e) 15

Solución 2. **(e)**. Las posibilidades de alternar dos verdades con una mentira son:

$$VVMVVM,\ VMVVMV \text{ y } MVVMVV.$$

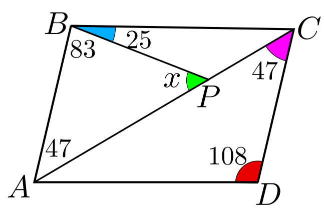
El primer caso es imposible porque se contradicen que el número es menor a 30 y que su doble tiene 3 cifras y entonces no podría ser menor a 30. El segundo caso también es imposible porque si es menor que 30 y es par entonces una de sus cifras no puede ser 7. En el tercer caso deducimos que el número es 78, y entonces la respuesta es $7 + 8 = 15$.

Problema 3. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura, un punto P está sobre la diagonal AC. Se ha marcado la medida de algunos ángulos. ¿Cuántos grados mide el ángulo x?



(a) $40°$ (b) $74°$ (c) $45°$ (d) $48°$ (e) $50°$

Solución 3. **(e)**. En un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales, así que $\angle ABP = 108° - 25° = 83°$. También tenemos que $\angle BAC = \angle ACD = 47°$ por ser AC una transversal entre paralelas. Pero la suma de los ángulos en un triángulo es $180°$, así que, en $\triangle ABP$, $x = 180° - (83° + 47°) = 50°$.



Problema 4. La tecla del número 5 de una calculadora no sirve. Lázaro escribió un número de 6 cifras pero la calculadora escribió 2026. ¿Cuántas posibilidades hay para el número que escribió Lázaro?

(a) 15 (b) 16 (c) 18 (d) 20 (e) 21

Solución 4. **(a)**. De las 6 posiciones posibles para los $5'$s hay que escoger 2, por ejemplo, en las posiciones $\{1, 2\}$ el número escrito sería 552026, y en las posiciones $\{2, 4\}$ el número escrito sería 250526. Las siguientes 15 son las posibilidades de elegir las dos posiciones:

$$\begin{aligned} \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \\ \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \\ \{4,5\}, \{4,6\}, \\ \{5,6\}. \end{aligned}$$

Problema 5. Nueve canguros están en una línea como se muestra en el diagrama. Cada vez que 2 canguros se encuentran frente a frente, intercambian su lugar. Hacen todos los intercambios posibles hasta que ya no haya parejas de canguros frente a frente. ¿Cuántos intercambios harán?

(a) 5 (b) 9 (c) 10 (d) 12 (e) 15

Solución 5. **(c)**. Numeremos a los canguros de izquierda a derecha como se muestra en la figura.

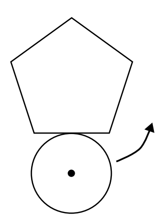
Notamos que los que están viendo hacia la izquierda son los que llevan los números 2, 3, 6 y 9. Ellos deberán quedar en los primeros 4 lugares. Entonces el 2 llega con un intercmbio al primer lugar, el 3 llega con 1 intercambio al segundo lugar, el 6 llega con 3 intercambios al tercer lugar y el 9 llega con 5 intercambios al cuarto lugar. El número de pasos es $1 + 1 + 3 + 5 = 10$.

Problema 6. Un número $a \neq 1$ (no necesariamente entero) satisface $a \leq a^4 \leq a^2$. ¿Cuál de las siguientes se puede **asegurar** acerca de a?

(a) $a \leq -1$ (b) $-1 \leq a \leq 0$ (c) $0 \leq a < 1$ (d) $a > 1$ (e) $a = 0$ o $a = -1$

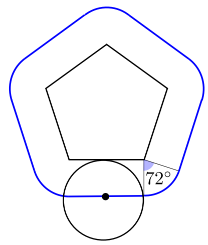
Solución 6. **(b)**. Si $a = -\frac{1}{2}$, entonces $a^4 = \frac{1}{16}$ y $a^2 = \frac{1}{4}$, así que se satisface la condición y ninguna de $a \leq -1$, $0 \leq a < 1$, $a > 1$ o $a = 0, -1$ es verdadera. Por otro lado, la condición $a \leq a^4$ nos dice que $a \leq 0$ o $a \geq 1$. La condición $a^4 \leq a^2$ nos dice que $a^2 \leq 1$, lo cual es equivalente a $-1 \leq a \leq 1$. Entonces ambas condiciones juntas nos dicen que $-1 \leq a \leq 0$.

Problema 7. Un disco de diámetro 1 gira alrededor de un pentágono de lado 1. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del centro del disco?



(a) $\frac{5\pi}{2}$ (b) $5+\frac{\pi}{2}$ (c) 10π (d) $5+5\pi$ (e) $5+\pi$

Solución 7. **(e)**. Su trayectoria está formada por 5 segmentos de recta de longitud 1 y 5 sectores de una quinta parte de un círculo de diámetro 1. Entonces la longitud es $5+\pi$.

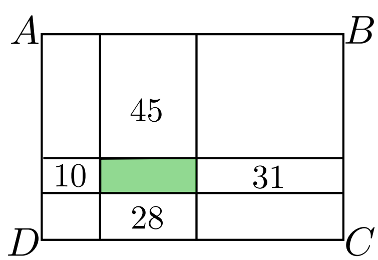


Problema 8. La edad de un árbol en el año 2000 era 4 veces la edad de otro árbol. Ahora, en 2026, la edad del árbol viejo es el doble que la del más joven. ¿Cuál es la suma de edades de los dos árboles actualmente?

(a) 78 (b) 104 (c) 117 (d) 156 (e) 169

Solución 8. **(c)**. Digamos que la edad actual del árbol más joven es e. Entonces la edad del más viejo es $2e$. Además tenemos que $2e-26=4(e-26)$; dividiendo entre 2 tenemos $e-13=2e-52$, de donde $e=39$. La suma de edades actuales es $3\cdot 39=117$.

Problema 9. El perímetro del rectángulo $ABCD$ es de 92 cm. Está partido en rectángulos más pequeños, como se muestra. Dentro de algunos de esos rectángulos más pequeños se ha puesto su perímetro. ¿Cuánto es el perímetro del rectángulo sombreado?



(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 23 (e) 24

Solución 9. **(c)**. La suma $10+28+31+45=114$ es igual al perímetro del rectángulo grande más el perímetro del rectángulo sombreado. Entonces el perímetro del rectángulo sombreado es $114-92=22$.

Problema 10. En un grupo hay 5 niñas y 5 niños. Las niñas formarán todas las parejas posibles entre sí, y los niños también formarán todas las parejas posibles entre sí. Cada pareja de niñas se enfrentará a cada pareja de niños en un partido de tenis. ¿Cuántos partidos jugará cada niña?

(a) 5 (b) 10 (c) 20 (d) 40 (e) 50

Solución 10. **(d)**. El número de parejas de niños es 10 (por ejemplo, si los niños son A, B, C, D y E, entonces las parejas son $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$ y $\{D, E\}$). Cada niña formará pareja con otras 4 niñas, así que cada niña jugará $4 \times 10 = 40$ partidos.

Problema 11. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 30 cm. Uno de los catetos mide 5 cm. ¿Cuántos centímetros mide el otro cateto?

(a) 3 (b) 4 (c) 10 (d) 12 (e) 13

Solución 11. **(d)**. Digamos que el otro cateto mide c. Entonces la hipotenusa mide $30 - (c + 5) = 25 - c$ y, por el teorema de Pitágoras, $5^5 + c^2 = (25 - c)^2 = 625 - 50c + c^2$, de donde $50c = 625 - 25 = 600$, y así $c = 12$.

Problema 12. La suma de los cuadrados de 5 números consecutivos es 990. ¿Cuánto es la suma de los 5 números?

(a) 50 (b) 55 (c) 60 (d) 65 (e) 70

Solución 12. **(e)**. Digamos que los números son $x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$ y $x + 2$. Así

$$\begin{aligned} & (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ = \; & (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 2x + 1) + x^2 + (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) \\ = \; & 5x^2 + 10. \end{aligned}$$

Entonces $x = \dfrac{990 - 10}{5} = 196$, de donde $x = 14$. La suma de los 5 números es $5 \times 14 = 70$.

Problema 13. Se tenían 9 tarjetas con los siguientes números: 4, 5, 6, 7, 9, 13, 17, 21, 24. Se le dieron al azar 4 tarjetas a Omar y otras 4 a Raúl. Resultó que la suma de las tarjetas de Raúl es el triple que la suma de las tarjetas de Omar. ¿Cuál tarjeta no le tocó a ninguno de los dos?

(a) 6 (b) 7 (c) 9 (d) 13 (e) 17

Solución 13. **(a)**. La suma de las tarjetas de Omar con las de Raúl debe ser un múltiplo de 4. Como la suma de todas las tarjetas es $4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 13 + 17 + 21 + 24 = 106$

y $106 = 4 \times 26 + 2$, entonces la tarjeta que sobra debe tener residuo 2 al dividir entre 4; el único de los números que lo cumple es 6. Comprobemos que hay 4 tarjetas que suman $\frac{106-6}{4} = 25$: $4 + 5 + 7 + 9 = 25$ (el resto debe sumar $3 \times 25 = 75$).

Problema 14. Mercedes hizo una caminata de 2 horas de su casa a una colina y de vuelta. En la parte plana (de ida y vuelta) su velocidad fue de 4 Km/h. En la subida de la colina su velocidad fue de 3 Km/h y de regreso, en la bajada, su velocidad fue de su 6 Km/h. ¿Cuántos kilómetros caminó?

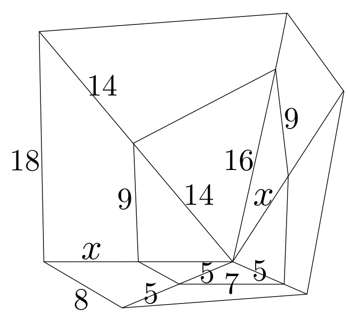
(a) 4 Km (b) 6 Km (c) 8 Km (d) 10 Km (e) 12 Km

Solución 14. **(c)**. Digamos que la distancia plana es p, y que la distancia en la colina es c. Entonces

$$\frac{2p}{4} + \frac{c}{3} + \frac{c}{6} = 2.$$

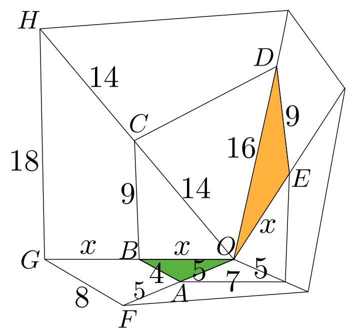
Multiplicando la ecuación por 12 y agrupando obtenemos $6p + 6c = 24$, de donde la distancia recorrida fue $2c + 2p = 8$ Km.

Problema 15. En la figura se muestra una telaraña y algunas medidas de segmentos. Se sabe que x es un número entero. ¿Cuángo vale x?



(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Solución 15. **(b)**. Llamemos O al centro de la telaraña y sean A, B, C, D, E, F, G y H los puntos marcados en la figura. Notamos primero que el triángulo OGH es el doble que el triángulo OGH pues el ángulo en O es común, $|GH| = 2|BC|$ y $|OH| = 2|OC|$. Entonces $|BG| = |OB| = x$. Entonces también tenemos que el triángulo OFG es el doble que el triángulo OAB, es decir, $|AB| = 4$. Ahora, por la desigualdad del triángulo, en ABO tenemos que $x < 4 + 5 = 9$, y en ODE tenemos que $x + 9 > 16$. Las dos desigualdades nos dicen que $x = 8$.


H
D
14
9
C
16
18
9
14
E
x
x
x
G
B
O
4
5
5
7
5
8
A
F